

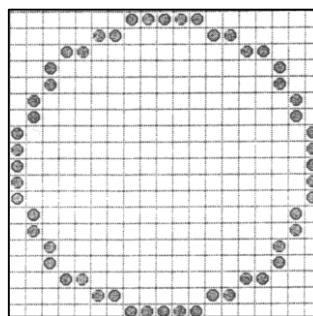
# DES CHANGEMENTS DE PARADIGME DANS LE DEVELOPPEMENT DE LOGICIELS

Douglas NAVARRO GUEVARA

Intéressé par les implications du développement d'outils informatiques pour la réalisation de logiciels qui servent à résoudre des problèmes mathématiques, je fais ici le point sur l'important écart qui peut se présenter entre différentes approches de résolution d'un certain problème quand on cherche une solution algorithmique et discrète. Je propose donc ici deux exemples, d'abord, un exemple simple mais très illustratif concernant le traçage d'un cercle, ensuite, celui du problème de la représentation des fonctions transcendentes dans le contexte du développement d'un logiciel pour la réalisation des calculs symboliques. Finalement, la conclusion porte sur la nécessité de reconsidérer certaines techniques mathématiques prenant en compte la nature des ordinateurs.

## 1. Premier exemple : Traçage d'un cercle

On considère le problème de dessiner, le mieux possible, un cercle sur la maille de points qui constitue l'écran d'un ordinateur. On veut obtenir le meilleur dessin possible pour n'importe quel cercle, mais on veut aussi le faire avec le plus petit nombre de calculs possible.



On considère successivement une séquence de trois solutions du problème. Dorénavant, on envisagera l'écran de l'ordinateur comme une matrice à coordonnées entières et le cercle à tracer sera centré à l'origine.

### 1.1. Première solution

On produit le dessin voulu en marquant le point de coordonnées  $(r*\cos(t), r*\sin(t))$  pour chaque valeur  $t$  entre 0 et 360 degrés (un degré à la fois). Bien sûr, on prend les valeurs entières de ces coordonnées. Malheureusement, cette solution – probablement la plus naturelle pour un premier essai – est déficiente. On remarque à ce sujet :

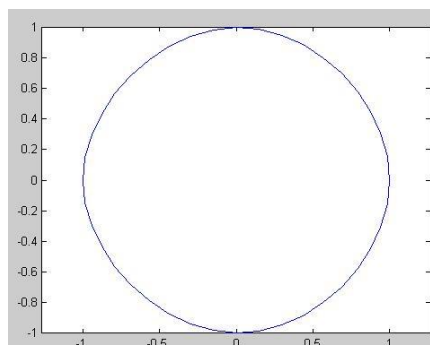
- d'abord, que l'utilisation des fonctions  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$  utilise une quantité considérable de temps du processeur,
- puis et plus essentiellement, que le choix de prendre des accroissements d'un degré à la fois étant complètement arbitraire, la qualité du cercle produit dépend du rapport entre le rayon du cercle et la densité de points de la matrice. Ainsi, avec un rayon suffisamment grand, on obtiendra un cercle avec des discontinuités, tandis que, dans le cas contraire, il y aura des entrées qui seront sollicitées plusieurs fois.

### 1.2. Deuxième solution

On envisage cette fois la possibilité d'aller au delà de l'utilisation des fonctions :  $\cos(t)$  et  $\sin(t)$ . On utilise ici une interpolation bidimensionnelle du type « Spline » pour engendrer la courbe à partir de cinq points. L'*Aide du logiciel MatLab* fournit justement un exemple dans lequel le tracé d'un cercle est réalisé en utilisant cette approche. L'exemple en question est le suivant :

```
circle = spline( 0:4, [0 1 0 -1 0 1 0; pi/2 0 1 0 -1 0 pi/2] );
xx = 0:.1:4;
cc = ppval(circle, xx);
plot(cc(1,:), cc(2,:)), axis equal
```

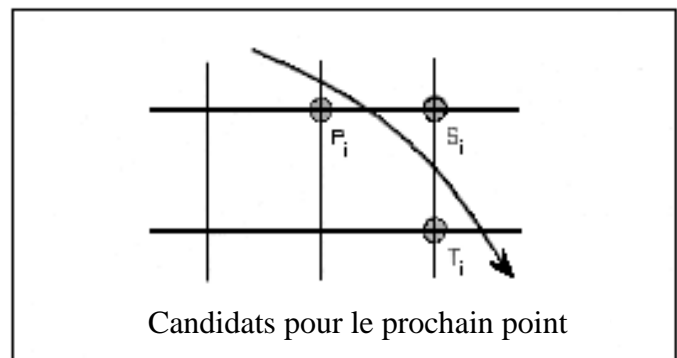
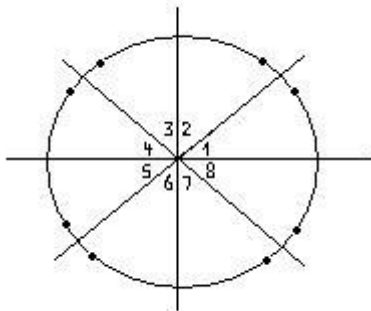
La première ligne sert à définir une interpolation cubique segmentaire à partir de cinq points. Pour la commande « Spline », on précise d'abord le domaine du paramètre (entre 0 et 4), puis, on définit les valeurs en  $x$  ainsi que les valeurs en  $y$  : les coordonnées des points déterminés sont données entre crochets [ $x$ 's ;  $y$ 's]. L'utilisation de sept valeurs pour les vecteurs de coordonnées, plutôt que cinq, est due au choix de pentes convenables pour les extrêmes. La deuxième ligne  $xx = 0 : .1 : 4$  ; sert à définir les valeurs pour lesquelles sera effectuée l'interpolation (de 0 à 4 en accroissements de 0,1). La « continuité » de la courbe est donc obtenue en reliant les points engendrés avec des segments de droite. On obtient alors :



Le résultat obtenu est remarquable, néanmoins, la solution est encore déficiente. Bien que la solution soit plus élaborée du point de vue mathématique, la qualité du tracé dépend encore du rapport entre l'accroissement de la variable et la densité des points de l'écran.

### 1.3. Troisième solution

On considère cette fois l'algorithme de Michener, connu comme « *la méthode de l'analyseur différentiel numérique* »<sup>1</sup>. Dans cet algorithme, le cercle est coupé en octants, lesquels sont traités par symétrie : *i.e.* chaque fois qu'on connaît un point qui doit être coloré, on colorie aussi ses homologues par symétrie sur les sept autres octants.



Le traçage du cercle commence à la fin du deuxième octant, avec le point :  $(0, r)$ . Puis, on poursuit l'algorithme en traçant le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre jusqu'au point  $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ . Une fois un point déterminé sur le cercle, l'algorithme utilise la pente de la tangente au cercle en ce point afin de choisir convenablement le prochain point à solliciter.

Ainsi, une fois choisi le point  $P_i = (X, Y)$ , les prochains points possibles sont :  $S_i = (X+1, Y)$  et  $T_i = (X+1, Y-1)$  dont l'algorithme sélectionne celui pour lequel la distance au cercle est minimale. Le rapport entre les distances respectives des points en question au cercle peut être établi à partir des calculs d'accroissements selon un critère ici nommé  $C$ . La valeur initiale du critère est  $C = 3-2r$ , la valeur initiale de  $Y$  est  $r$ , et on trace une boucle pour  $X$  allant de  $0$  à  $\frac{r}{\sqrt{2}}$ . A chaque itération, on marque le point  $(X, Y)$  et on teste le critère. Si  $C < 0$  on ajoute  $4X + 6$  à  $C$ , sinon, on décrémente  $Y$  et on ajoute  $4(X - Y) + 10$  à  $C$ .

Ainsi défini, l'algorithme est optimal et indépendant du cercle, en fait :

- la détermination du prochain point n'utilise que des opérations élémentaires,

<sup>1</sup> Schweizer, *Infographie I*, pp. 278-287.

- l'algorithme travaille en prenant en compte la densité des points et le rayon du cercle. Alors, la qualité du tracé ne dépend pas des données particulières du cercle envisagé.

- Cette approche produit toujours le meilleur<sup>2</sup> dessin possible, c'est-à-dire qu'il ne manque aucun point sur le cercle et que les points ne sont pas sollicités plus d'une fois.

On remarque, dans la série de solutions ainsi présentées, que si la première solution est très naturelle et si la deuxième constitue une amélioration très technique et certainement très efficace de la première, la supériorité de la troisième solution est liée au changement de paradigme –au sens de Kuhn<sup>3</sup>– qu'elle présente.

## 2. Deuxième exemple : représentation et traitement des fonctions

Les éléments présentés maintenant concernent l'approche mathématique qui a été développée pour le traitement des fonctions transcendentes dans l'élaboration d'un logiciel pour faire des calculs symboliques. Pour cela, on a utilisé une représentation discrète, basée sur certains types de séries entières, laquelle devait fournir davantage de possibilités pour la manipulation automatique des fonctions envisagées (détermination de la somme, du rayon de convergence, dérivation, intégration, décomposition en parties paire/impair, limites vers l'infini, etc.).

### 2.1. Représentation

On a d'abord étudié les tableaux de développement en série des fonctions usuelles en cherchant à identifier ce qu'il fallait prendre en compte pour cette représentation. On a remarqué que pour représenter la plupart des séries entières des fonctions usuelles (sin, cos, log, arctg, arcth, etc.) il suffit d'utiliser les expressions :

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2 \frac{x^2}{2!} + b_3 \frac{x^3}{3!} + b_4 \frac{x^4}{4!} + b_5 \frac{x^5}{5!} + b_6 \frac{x^6}{6!} + b_7 \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + b_7x^7 + \dots$$

$$f(x) = b_1x + b_2 \frac{x^2}{2} + b_3 \frac{x^3}{3} + b_4 \frac{x^4}{4} + b_5 \frac{x^5}{5} + b_6 \frac{x^6}{6} + b_7 \frac{x^7}{7} + \dots$$

où dans tous les cas  $b_i$  est une suite périodique.

<sup>2</sup> Cet algorithme a été inspiré par un algorithme développé par Bresenham pour tracer des segments de droite. Il est possible de prouver que ces algorithmes sont optimaux dans le sens où ils permettent un meilleur tracé des cercles ou droites possibles (respectivement) dans un temps minimal. Schweizer, *Infographie I*, pp. 255-268.

<sup>3</sup> Kuhn, *La tension essentielle ...*

On choisit alors d'utiliser les deux types de séries suivants :

$$\begin{aligned} \text{Type I : } & \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i!} \\ \text{Type II : } & \sum_{i=\max\{0,-k\}}^{\infty} b_i \frac{(i+k)!}{i!} x^i \quad \text{où } b_i \text{ est une suite périodique et } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Ce qui permet une représentation discrète. En effet, pour définir une série de ces types envisagés, il suffit de préciser : le type de série (**Type I** ou **II**), la suite génératrice  $\sigma$  de la suite  $b_i$ , et pour celles du **Type II** le paramètre  $k$ .

On considère deux exemples :

$$i) S(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

est une série du **Type I** :  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i!}$ , dont la suite génératrice de la suite  $b_i$  est :

$$\overline{1,1,-1,-1}. \text{ On la représente par } S_{\overline{[1,1,-1,-1]}}(x).$$

$$ii) S(x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

est une série du **Type II** :  $\sum_{i=\max\{0,1\}}^{\infty} b_i \frac{(i-1)!}{i!} x^i$  dont la suite génératrice est définie à

partir du coefficient  $b_0 = b_4$  est  $\overline{1,-1,-1,1}$ . On la représente par  $S_{\overline{[-1,1,-1,-1]}}(x)$ , où

le premier  $-1$  correspond à la valeur du paramètre  $k$ . Le type de la série est défini implicitement du fait de l'inclusion du paramètre  $k$ .

## 2.2. Traitement

Une fois la représentation fixée, on met l'accent sur les possibilités du traitement de cette représentation.

Par exemple, pour les séries du **Type I** dont la période de la suite génératrice est 4, sa représentation est limitée au quadruplet :  $(a, b, c, d)$ , dont les fonctions :  $Ch, Sh, Cos, Sin$  appartiennent toutes au type mentionné ; en fait, elles correspondent respectivement à :  $(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)$ .

Quand on cherche à identifier une série de **Type I** et de période 4, caractérisée par  $(a, b, c, d)$ , on note que l'on peut écrire n'importe quelle série  $(a, b, c, d)$  comme une combinaison linéaire des quadruplets :  $(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)$  ; ce qui devient un outil très efficace pour la recherche de la somme d'une série quelconque, ou de manière plus focalisée dans ce contexte, un outil pour décoder les représentations que peuvent produire les différents calculs.

Cela a motivé une recherche plus étendue, qui a permis d'établir que beaucoup d'autres fonctions peuvent certainement être représentées et manipulées de la même manière.

Voici donc une introduction des propriétés des représentations des types de séries les plus utilisées jusqu'ici.

### 2.2.1. Séries du Type I de dimension 4

Parmi les séries du **Type I**, on considère l'ensemble des séries :  $B_4 = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i!} \right\}$ , où  $b_i$  est une suite périodique de longueur 4. On remarque d'abord que cet ensemble est un espace vectoriel isomorphe à  $\mathbf{R}^4$ .

Identification de la somme :

Les ensembles suivants :

$$B = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i}}{(4i)!}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i+1}}{(4i+1)!}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i+2}}{(4i+2)!}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!} \right\}$$

et

$$A = \{ch(x), sh(x), cos(x), sin(x)\} \text{ (les séries correspondantes)}$$

sont tous deux des bases de l'espace vectoriel  $B_4$ . Ils seront appelés respectivement: « base canonique » et « base usuelle ». En fait, si on considère les « images » par l'application qui envoie les suites génératrices des séries de **Type I** canoniquement sur les membres de  $\mathbf{R}^4$ , alors elles correspondent respectivement à :

$$B = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

et

$$A = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$$

Donc la recherche de la somme d'un membre quelconque de  $B_4$  peut être traitée tout simplement comme un changement de base, de la base canonique vers la base usuelle. Dans le cas général de l'identification des séries du **Type I** et de dimension  $n$ , on obtient aussi la solution dans 100% des cas<sup>4</sup> [Navarro].

### 2.2.2 Séries du Type II de dimension 4

Parmi les séries du **Type II**, on considère celles dont la longueur de la suite génératrice de la suite périodique  $b_i$  est 4 et la valeur du paramètre  $k$  est  $-1$ . On le note :  $B_{4,-1} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i \frac{x^i}{i} \right\}$ . L'ensemble considéré est donc un espace vectoriel

isomorphe à  $\mathbf{R}^4$ . Ainsi, les ensembles suivants :

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{4i}}{4i}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i+1}}{4i+1}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i+2}}{4i+2}, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{4i+3}}{4i+3} \right\}$$

et

$$A = \left\{ -\frac{1}{2} \ln(1-x^2), \arg th(x), \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \arctg(x) \right\}$$

<sup>4</sup> Navarro, *Sur l'utilisation des outils informatiques .....*, pp. 179-181.

sont tous les deux bases de l'espace vectoriel  $B_{4,-1}$ . Ils sont appelés : « base canonique » et « base usuelle ». Si on prend ces images canoniques sur  $\mathbf{R}^4$ , elles correspondent à :

$$\mathbf{B}=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

et

$$\mathbf{A}=\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$$

Donc, la recherche de la somme d'un membre quelconque de  $B_{4,-1}$  peut être traitée tout simplement comme un changement de base, de la base canonique vers la base usuelle, comme on l'a fait auparavant pour les séries du *Type I*. Dans le cas général de l'identification des membres des espaces de dimension  $n$ , on utilise quelques autres opérateurs afin d'obtenir l'identification des séries du *Type II*. En fait, il a été constaté que dans tous les cas, les séries dont la suite génératrice est égale à  $\bar{1}$  correspondent toujours à des fonctions connues. De façon pratique (avec un logiciel), on a vérifié que, jusqu'à  $n = 50$ , on obtient la solution pour 100% des cas<sup>5</sup>. Voici un exemple assez détaillé de cette démarche :

On considère la recherche de la somme de l'exemple *ii*) qu'on vient de présenter :

$$S(x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots = S_{\{k=-1, \overline{1,-1,-1,1}\}}(x)$$

La procédure de résolution met l'accent sur la simplification de la suite génératrice de la série. Ceci correspond parfois à la modification du paramètre  $k$ , ou bien, de la variable  $x$  de la série. On ne donne pas ici toutes les précisions, on veut seulement montrer l'évolution de la suite. Il faut remarquer que dans ce cas, on prend pour suite génératrice :  $\overline{1,-1,-1,1}$ , parce qu'on commence par  $b_0$ .

Pour traiter ce cas, on considère les opérateurs suivants :

- *ChB* : Opérateur de changement de base, de la base canonique vers la base  $\{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$ .
- *Ctr* : Opérateur de contraction : quand les nombres non nuls n'occupent que les rangs qui sont multiples de  $p$ , il enlève les rangs non multiples de  $p$ .
- *CSgA* : Opérateur de changement alterné de signe de la suite.
- *Spl* : Opérateur de simplification vers une suite minimale.
- *Derv* : Opérateur de dérivation terme à terme.

Ce qui donne pour la série en question :

---

<sup>5</sup> *Ibid*, pp. 75-79 et pp. 254-256.

$ChB(S_{[-1, \overline{1,-1,-1,1}]}(x)) = S_{[-1, \overline{1,0,-1,0}]}(x)$	$= Ctr(S_{[-1, \overline{1,0,-1,0}]}(x)) = \frac{1}{2}S_{[-1, \overline{1,-1}]}(x^2)$
	$\frac{1}{2}CSgA(S_{[-1, \overline{1,-1}]}(x^2)) = \frac{1}{2}S_{[-1, \overline{1,1}]}(-x^2)$
	$\frac{1}{2}Spl(S_{[-1, \overline{1,1}]}(-x^2)) = S_{[-1, \overline{1}]}(-x^2)$
	$\frac{1}{2}S_{[-1, \overline{1}]}(-x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$-S_{[-1, \overline{0,1,0,-1}]}(x)$	$= -Derv(S_{[-1, \overline{0,1,0,-1}]}(x)) = -S_{[0, \overline{1,0,-1,0}]}(x)$
	$-Ctr(S_{[0, \overline{1,0,-1,0}]}(x)) = -S_{[0, \overline{1,-1}]}(x^2)$
	$-CSgA(S_{[0, \overline{1,-1}]}(x^2)) = -S_{[0, \overline{1,1}]}(-x^2)$
	$-Spl(S_{[0, \overline{1,1}]}(-x^2)) = -S_{[0, \overline{1}]}(-x^2)$
	$-S_{[0, \overline{1}]}(-x^2) = -\frac{1}{1+x^2}$
	$-\int \frac{1}{1+x^2} dx = -arctg(x)$

Autre exemple de problème, illustrant le potentiel d'application de la méthode :

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{2x^{4i+1}}{(4i+1)} + \frac{3x^{4i+2}}{(4i+2)} + \frac{4x^{4i+3}}{(4i+3)} + \frac{x^{4i+4}}{(4i+4)} \right)$$

Cette fois on note le résultat de la recherche de la somme de cet exercice dans la notation mathématique usuelle. Il convient de remarquer néanmoins que ce sont les résultats produits par l'application du logiciel. En fait, le premier pas n'est qu'un changement de base vers la base déjà utilisée<sup>6</sup> dans l'exercice précédent.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( 2 \frac{x^{4i+1}}{(4i+1)} + 3 \frac{x^{4i+2}}{(4i+2)} + 4 \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)} + \frac{x^{4i+4}}{(4i+4)} \right) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{x^{4i+2}}{(4i+2)} + \frac{x^{4i+4}}{(4i+4)} \right) + 3 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{x^{4i+1}}{(4i+1)} + \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)} \right) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{x^{4i+2}}{(4i+2)} + \frac{x^{4i+4}}{(4i+4)} \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{x^{4i+1}}{(4i+1)} - \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)} \right) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{x^{2(i+1)}}{2(i+1)} \right) + 3 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{x^{2i+1}}{2i+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(-x^2)^{i+1}}{i+1} \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \left( (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} \right) \\
&= -\ln(1-x^2) + 3 \arg th(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - arctg(x)
\end{aligned}$$

<sup>6</sup> On continue ensuite à réduire les suites génératrices des membres de la base comme auparavant.

On remarque qu'il s'agit bien d'un calcul plutôt difficile à réaliser manuellement. D'autre part, il faut dire que bien d'autres propriétés analytiques se sont montrées très accessibles à partir de cette représentation, par exemple la séparation en une partie paire et une partie impaire pour la fonction associée à une série du *Type I*, ou bien, le traitement des équations différentielles ordinaires d'ordre  $n$  à coefficients constants.

### 3. Conclusions

Ces exemples permettent d'illustrer l'influence des contraintes informatiques dans le développement de solutions à des problèmes donnés.

Ainsi, dans le premier exemple, si on essaie de caractériser le paradigme de la troisième solution, il faut prendre en compte le fait qu'il travaille à partir de ce qui existe, à savoir les points dans la matrice, et qu'il ne fait qu'identifier les points qui sont sur le cercle. C'est une approche complètement différente de celle des autres solutions qui semblent pourtant très naturelles du point de vue strictement numérique.

D'autre part, le deuxième exemple montre comment la nécessité d'une représentation discrète des fonctions usuelles – nécessaire pour la représentation informatique – pour un traitement automatique conduit à un traitement algorithmique nouveau qui change les possibilités des calculs analytiques. En fait, on peut par exemple calculer dans beaucoup de cas la somme d'une série de façon algorithmique plutôt que par tâtonnements comme on le fait habituellement. Les calculs – dériver, intégrer, etc. – avec cette représentation deviennent beaucoup plus rapides que ceux qui se font avec l'approche usuelle par réécriture. Les possibilités sont vraiment intéressantes. Il reste beaucoup à étudier, non seulement du point de vue utilitaire, mais aussi pour des questions plus profondes telles que d'éventuels rapports entre la distance projetée et les propriétés analytiques des fonctions envisagées.

Cela constitue, avec ces grandes différences du point de vue pragmatique, une illustration de l'importance du paradigme avec lequel on cherche à résoudre un problème donné à l'aide des outils à nature discrète et algorithmique. Alors, au moment de développer les logiciels pour faire de mathématiques, il faudra dans certains cas reconsidérer ces mathématiques, même si elles ont des solutions bien connues.

### 4. Bibliographie

- Apostol, Tom, *Calculus*, Massachusetts, Blaisdell Publishing, 1967, volume 2.  
 Bazex, Pierre, *La place des mathématiques dans le cours d'informatique*,  
 Colloque : Liaison Lycée Post-Bac en Mathématiques. Toulouse, 1999.  
 Cuppens Roger, *Avec Cabri – Géomètre II, jouez... et faites de la géométrie !*,  
 Brochure APMEP n°136, Paris, 2002.  
 Guin, Dominique et Trouche, Luc, *Calculatrices Symboliques, transformer un  
 outil en un instrument du travail informatique : un problème didactique*,  
 Grenoble, La Pensée Sauvage Editions, 2002.

- Kutzler, B, « DERIV(E)ons vers le futur des Mathématiques », in *Actes de l'Université d'été, Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, Caen, IREM et Bordeaux, IUFM, 1994, pp 67-78.
- Lygeros, Nik, Marguin, Olivier, Mizony, Michel, *Réflexions méthodologiques en calcul formel*, Lyon, Université Lyon I, Repères n°34, 1999.
- Quéré, Maryse, et al., *Systèmes experts et enseignement assisté par ordinateur*, Paris, Éditions Ophrys, Collection Autoformation et Enseignement Multimédia, 1991.
- Kuhn, Thomas, *La tension essentielle, tradition et changement dans les sciences*, Paris, Éditions Gallimard, 1990.
- Navarro, Douglas, *Sur l'utilisation des outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse en didactique des mathématiques, Toulouse, Université Toulouse III, 2006.
- Richardson D. « Some undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable ». *The Journal of Symbolic Logic*. 33(4), pp. 414-520.
- Schweizer, Philippe, *Infographie I*, Presses polytechniques Romandes, Lousanne, 1987.